

第 29 回シュプリンガー数学コンテスト講評と解答

審査委員長 秋山 仁

問題 1. 正 10 角形の各頂点に, 1, 2, 3 のいずれかの数を割り当て, それらの総和を S とする. 1 が割り当てられた頂点が 5 個以上あり, かつ, $S \leq 19$ のとき, 次の (*) が成り立つことを示せ.

1 から S までのどの自然数 n も, 連続する何頂点か (1 頂点でもよい) に } (*)
割り当てられた数の和として表せる.

寄せられた答案のほとんどのものが「隣り合うある 2 頂点に 1 が割り当てられているとき」と「そうでないとき」に分けて証明するものでした. これは, 「1 が割り当てられた頂点が 5 個以上」という仮定をうまく使った場合分けといえます. 実は, この仮定を除いても, 同じ結論が成り立ちます (コメント 1, 2). 本問の答案については, まとめ方にもいろいろな工夫が見られ, 全体的に優れた答案が多かったのですが, 検討の結果, 峰岸龍さんを最優秀者 (一着正解者でもあります) に決定しました.

一着正解賞 (敬称略)

峰岸 龍 (清水東高等学校)

最優秀者 (敬称略)

峰岸 龍 (清水東高等学校)

峰岸さんや武田久輝さん (南山高等学校) は, 本問で述べている事実が, 「正 $2m$ 角形の各頂点に, 1, 2, 3 のいずれかの数を割り当て, それらの総和を S とする」場合について, 「1 が割り当てられた頂点が m 個以上あり, かつ, $S \leq 4m - 1$ のときにも (*) が成り立つ」ことに言及していました (本問は $m = 5$ のとき). 武田さんは, この一般化した命題の証明とともに, その命題のバリエーションなども考察してくれました. 一般化については, コメント 3 で触れます.

解説

最初に, 上述の「隣り合うある 2 頂点に 1 が割り当てられているとき」と「そうでないとき」に分けて証明する方針 (方針 1) を解説します. 後半では, この場合分けをしない方針 (方針 2) を解説します. 方針 2 では, 「1 が割り当てられた頂点のおおの, 3 が割り当てられた頂点を対応させる」という考え方をういます. この方針を少し発展させると, 「1 が割り当てられた頂点が 5 個以上」という仮定を除いた命題を証明できます.

方針 1

1 つの頂点から反時計回りの順に, 各頂点に割り当てられた数を a_1, a_2, \dots, a_{10} として (図 1),

$$S_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m \quad (1 \leq m \leq 10)$$

とします. ある m ($1 \leq m \leq 10$) に対する S_m の値が, 所望の n の値になってくれれば嬉しいのですが, 必ずしもそうなるとは限りません.

いま, $S_m \geq n$ をみたす最小の m を考えます. このとき, $(n \leq) S_m \leq n+2$ です. なぜならば, $S_m \geq n+3$ とすると, $S_m \geq 4$ より $m \geq 2$ であり, $S_{m-1} = S_m - a_m \geq (n+3) - 3 = n$ となって, m の最小性に反するからです. したがって, 次の3つの場合に分けられます.

(i) $S_m = n$, (ii) $S_m = n+1$, (iii) $S_m = n+2$

(i) の場合には, 左辺で表される和が所望の和の1つです. (ii) や (iii) の場合にも, “微調整” で所望の和が得られるようにしたいので, 出発点となる頂点をうまく選んでおくことを考えます.

もし $a_1 = 1$ となるように出発点を選んでおいたとすれば, (ii) の場合には, $m \geq 2$ で, $a_2 + \dots + a_m = n$ が成り立ちます. 1が割り当てられた頂点は5個以上ありますから, そのうちの1つを出発点にしておけばよいのです.

さらに, $a_2 = 1$ も成り立っていれば, (iii) の場合, $m \geq 3$ で, $a_3 + a_4 + \dots + a_m = n$ となります. したがって, 隣り合うある2頂点に1が割り当てられているときには, それらが最初の2つの頂点になるように, a_m ($1 \leq m \leq 10$) を定めておけばよいことになります.

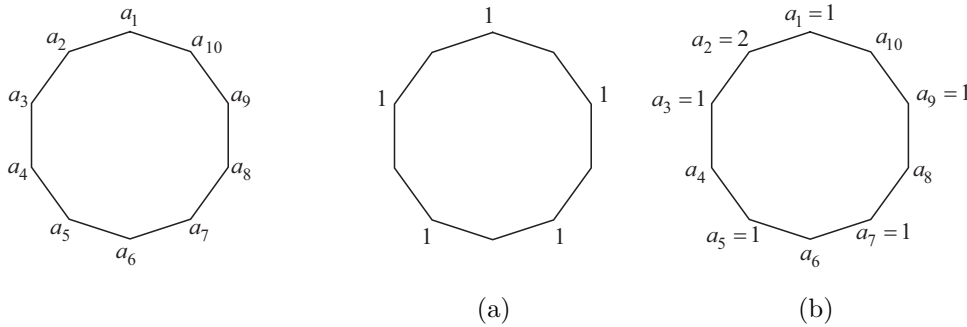


図 1

図 2

・残された場合

次に,

$$1 \text{ が割り当てられた頂点が隣り合わない} \tag{1}$$

場合を考えます. 1が割り当てられた頂点が5個以上あることを考え合わせると, この場合, 1つおきの頂点に1が割り当てられている(図2(a))ことがわかります(1が割り当てられた頂点の個数を k とすると, (1)より頂点の総数は $2k$ 以上だから, $2k \leq 10$ です. これと $k \geq 5$ より $k = 5$ となり, (1)によって図2(a)が得られます).

さらに, $S \leq 19$ (つまり S の値がある程度 “抑えられている”) という仮定を用いると, 残りの5個の頂点のうち, 少なくとも1つには2が割り当てられていることがわかります. なぜならば, 残りの5頂点すべてに3が割り当てられているとすると, $S = 1 \times 5 + 3 \times 5 = 20$ となってしまい, $S \leq 19$ に反するからです. この事実を活用できないかと考え, $a_1 = 1, a_2 = 2$ となるように最初の2つの頂点を選んでおくことにします(図2(b)).

前ページの (i), (ii) の場合については, 既に述べたとおりですので, 「(iii) $S_m = n+2$ 」 の場合を考えます. この場合, $a_m = 3$ です. なぜならば, $S_m = n+2 > 1$ より $m \geq 2$ であり, $a_m \leq 2$ とすると, $S_{m-1} = S_m - a_m \geq (n+2) - 2 = n$ となって, m の最小性に反するからです. さらに, $a_m = 3$ であることから, $a_{m+1} = 1$ です(図2(b));ただし, $a_{11} = a_1 = 1$ とします). したがって,

$$a_3 + a_4 + \dots + a_{m+1} = S_m - (a_1 + a_2) + a_{m+1} = (n+2) - (1+2) + 1 = n$$

となり, 所望の形の和が得られました.

寄せられた答案の多くがこの方針やこれに類する方針でした。峰岸さんは、同様の方針で、簡潔ながら要所を押さえた証明にまとめてくれました。

方針 2

方針 1 と同様に、各頂点に割り当てられた数を、1 が割り当てられた頂点から反時計回りの順に、 a_1, a_2, \dots, a_{10} として (a_2 の値は、1, 2, 3 のいずれでも構いません)、 $S_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m \geq n$ が成り立つ最小の m を考えます。(i), (ii) の場合は、方針 1 と同様ですが、「(iii) $S_m = n + 2$ 」についての扱い方が異なります。

$a_1 = 1$ からの和 S_m では (iii) の形になってしまう場合であっても、 $a_i = 1$ である別の a_i を出発点にすれば (図 3), (i) や (ii) に相当する和が得られることはあり得ます (図 3(b) に示される $a_i + a_{i+1} + \dots + a_{10} + a_1 + \dots + a_j$ の形の和も含め、 a_i から a_j までの和を $S(i, j)$ と表します。 $S(i, j)$ については、解説の最後に説明を補足をします)。その場合には、方針 1 と同様に考えられます。

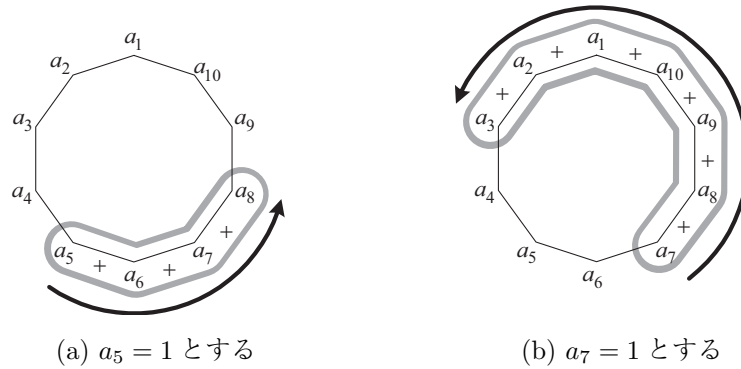


図 3

したがって、問題となるのは、 $a_i = 1$ であるどの i に対しても、(iii) に相当する「 $S(i, j) = n + 2$ 」になってしまう場合です。しかし、実は、このようなことはあり得ません。なぜでしょうか？

まず、方針 1 のときと同様に、 $a_i = 1$ で $S(i, j) = n + 2$ となるとき、 $a_j = 3$ です。しかも、 $a_i = a_{i'} = 1$ をみたく異なる i と i' に対して、 $S(i, j) = S(i', j') = n + 2$ をみたく j と j' も異なります。これらと、 $a_i = 1$ をみたく i が 5 個以上あることから、 $a_j = 3$ をみたく j も 5 個以上なければなりません (合わせて 10 個以下であることも考えると、いずれも 5 個ずつです)。しかし、このとき、 $S \geq 1 \times 5 + 3 \times 5 = 20$ となってしまい、 $S \leq 19$ に反します。つまり、「 $a_i = 1$ であるどの i に対しても、 $S(i, j) = n + 2$ となる」ことはありません。

冒頭に述べたように、方針 2 の考え方を発展させることで、より強い命題を導くことができます。そこで、以下の「証明例」としては、方針 2 に基づく証明を紹介し、その後のコメントで発展的な話に触れることにします。

証明例では、任意の頂点を出発点にして、反時計回りの向きに、各頂点を P_1, P_2, \dots, P_{10} としています。頂点に割り当てられた数を、1 つの頂点 P_i から反時計回りに次々に加えていくと、 $S(i, j)$ の値は増加していき、ある時点からは $S(i, j) \geq n$ となります。証明例では、 $a_i = 1, n \geq 2$ のもとで、 $S(i, j)$ の値がはじめて n 以上になるときの j を考えます。 $a_i = 1, n \geq 2$ より $j \neq i$ であり、また、この j の 1 つ手前の段階では $S(i, j-1) < n$ となっていますから、証明例では、「 $j \neq i$ かつ $S(i, j-1) < n \leq S(i, j)$ をみたく j 」と表しています。

証明例 (方針2に基づく証明)

正十角形の頂点を, 1つの頂点から反時計回りに, P_1, P_2, \dots, P_{10} として, $I = \{1, 2, \dots, 10\}$ とする. また, 各 $i \in I$ に対して, P_i に割り当てられた数を a_i として, $A = \{i \mid a_i = 1, i \in I\}$, $B = \{i \mid a_i = 3, i \in I\}$ とする. 1が割り当てられた頂点が5個以上あることから,

$$A \text{ の要素は } 5 \text{ 個以上である.} \quad (2)$$

したがって, $n = 1$ は $i \in A \neq \phi$ に対する a_i の値として表される.

次に, $2 \leq n \leq S$ をみたく自然数 n を考える. $i \in I, j \in I$ に対して, 正十角形の周のうち, P_i から P_j までを反時計回り結ぶ部分 ($i = j$ のときには1点 P_i) に含まれる頂点に割り当てられた数の和を $S(i, j)$ とし, また, $S(i, 0)$ と $S(11, j)$ は, それぞれ $S(i, 10)$ と $S(1, j)$ を表すものとする.

各 $i \in A$ に対して, $a_i = 1$ と $n \geq 2$ から, $j \neq i$ かつ $S(i, j-1) < n \leq S(i, j)$ をみたく $j \in I$ が存在する. そこで, 以下, 各 $i \in A$ に対して, この j を考える. $S(i, j-1) \leq n-1$ と $a_j \leq 3$ より,

$$S(i, j) = S(i, j-1) + a_j \leq (n-1) + 3 = n+2 \quad (3)$$

だから,

$$(i) S(i, j) = n, \quad (ii) S(i, j) = n+1, \quad (iii) S(i, j) = n+2$$

のいずれかが成り立つ.

ある $i \in A$ に対して (i) が成り立つ場合は, $S(i, j)$ で表される和が所望の和の1つである. また, ある $i \in A$ に対して (ii) が成り立つ場合には, $i \neq j$ より $S(i+1, j) = S(i, j) - a_i = (n+1) - 1 = n$ だから, $S(i+1, j)$ で表される和が所望の和の1つである.

そこで, すべての $i \in A$ に対して (iii) が成り立つ場合を考える. このとき, 各 $i \in A$ について, (3) における \leq の等号が成り立つことから, $(S(i, j-1) = n-1$ かつ $a_j = 3$, すなわち, $j \in B$ である. このことと, 異なる $i \in A$ に対して (iii) をみたく j も異なること, および (2) より, A, B の要素はいずれも5個以上である. これより, $S \geq 1 \times 5 + 3 \times 5 = 20$ でなければならないが, これは $S \leq 19$ に反する. したがって, この場合は起こりえない.

以上より, 題意は示せた.

コメント

1. 本問において, 「1が割り当てられた頂点が5個以上ある」という仮定を除いても, 同じ結論が成り立ちます. すなわち, $S \leq 19$ でありさえすれば, 1から S までのどの自然数 n も, 連続する何頂点かに割り当てられた数の和として表せます (コメント2).

また, 1, 2, 3のそれぞれが割り当てられた頂点の個数を, 順に k_1, k_2, k_3 とすると, $S \leq 19$ は $k_1 > k_3$ と同値です. 実際, 1, 2, 3のそれぞれが割り当てられた頂点の個数を順に k_1, k_2, k_3 とすると, $k_1 + k_2 + k_3 = 10$ だから, $S = k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 2(k_1 + k_2 + k_3) + (k_3 - k_1) = 20 + (k_3 - k_1)$ となり, $S \leq 19 \iff k_1 > k_3$ です. したがって, $S \leq 19$ だけを仮定するかわりに, $k_1 > k_3$ だけを仮定しても同じことです.

2. 上記のように、 $S \leq 19$ だけ、または、 $k_1 > k_3$ だけを仮定した場合の証明は、「証明例」の証明を少し書き換えれば得られます。ここでは、 $k_1 > k_3$ を仮定した場合の証明について述べます。

まず、 $k_1 > k_3$ より、1 が割り当てられた頂点が少なくとも 1 つ存在します。「証明例」の下から 5 行目の「 $j \in B$ である」までは、(2) のかわりに、この事実を用いて議論を進められます。

それ以降は、「($j \in B$ であることと) 異なる $i \in A$ に対して (iii) をみたす j も異なることから、 B の要素の個数 k_3 は A の要素の個数 k_1 以上でなければならない。しかし、これは $k_1 > k_3$ に反する」とすれば、証明されたこととなります。

3. コメント 1, 2 で述べた証明と同様の議論により、以下の一般化した事実を導くことができます。

k を 3 以上の整数として、 k 角形の各頂点に、1, 2, 3 のいずれかの数を割り当て、それらの総和を S とする。このとき、 $S \leq 2k - 1$ ならば、1 から S までのどの自然数 n も、連続する何頂点かに割り当てられた数の和として表せる。

「 $S \leq 2k - 1$ 」のかわりに、「1 が割り当てられた頂点が、3 が割り当てられた頂点よりも多い」と仮定しても、同じ結論が成り立ちます。

問題 2. 立方体に、例えば図 1 に示すように円形の手錠 (てじょう) をはめると、立方体からこの手錠を抜き取ることはできない (証明は書かないが)。この事実をより厳密に表現するために、「円形の手錠」とは太さを無視した円周のこととする。また、「立方体に円形の手錠をはめる」とは、「立方体の内部を通らない円周で、その円周を境界とする円板 (面) が立方体と共有点をもつものをとる (つくる)」こととし、「立方体から手錠を抜き取る」とは、「円板 (境界の円周を含む) が立方体と共有点をもたない状態にする」こととする。

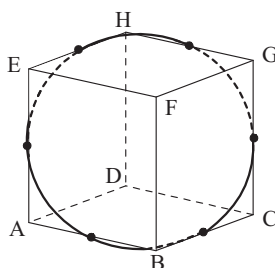


図 1. 手錠 (円周) は、立方体の 12 辺のうち 6 辺の中点を通っており、立方体の内部は通っていない。

以下、同様に解釈することとして、次の問いに答えよ。

- (1) 正四面体に適当な大きさの手錠をはめて、その手錠が正四面体から抜き取れないようにできる。このことを示せ。
- (2) どのような凸多面体 (くぼみのない多面体) にどのような三角形の手錠 (三角形の周) をはめても、その手錠は凸多面体から抜き取ることができる。このことを示せ。

本問の一着正解賞は相孝佳さんでした。

一着正解賞 (敬称略)

相 孝佳 (西大和学園高等学校)

最優秀者 (敬称略, 到着順)

相 孝佳 (西大和学園高等学校)

高田一輝 (大阪大学)

解説

(1) (1) は、次のことに気がつけば容易に解決できます。空間内で「ねじれの位置」にある 2 直線 (つまり、平行でなく、交わらない 2 直線) に対して、2 つの直線を結ぶ最短の線分は 2 つの直線に直交する線分で、ただ 1 本しか存在しない。これを見るため、 l_1, l_2 を空間内でねじれの位置にある直線とします。この 2 本の直線は、平行な 2 枚の平面に乗せることができます (l_1 を含み、 l_2 に平行な平面と、 l_2 を含み、 l_1 に平行な平面を取ればよい)。直線 l_1 を含み、この 2 枚の平面に垂直な平面と l_2 の交点を P_2 、直線 l_2 を含み、この 2 枚の平面に垂直な平面と l_1 の交点を P_1 とすると、線分 P_1P_2 が 2 本の直線を結ぶ唯一の最短の線分となり、しかもこの線分は 2 つの直線に直交します。

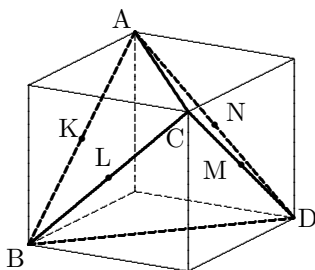
(2) 直線 l が凸多面体 Π (アルファベットの P にあたるギリシア文字でパイと読みます. π の大文字です) の内部を通らなければ, l を含む平面で Π の内部を通らないものが存在します. これは次のようにしてわかります. 直線 l を含む任意の平面を H とすると, H は直線 l で2つの部分 H^+, H^- に分けられます (それぞれを「半平面」といいます. ここでは, l は H^+, H^- のどちらにも含めないことにします). このとき, H^+, H^- の両方が Π の内部を通ることはありません (H^+ が Π の内部の点 P を含み, H^- が Π の内部の点 Q を含むとすると, Π は凸多面体だから, 線分 PQ は Π の内部にあります. すると, 線分 PQ と l の交点も Π の内部の点となり, l が Π の内部の点を通らないことに反します).

半平面 H^+ が Π の内部を通るとしよう. このとき, l を軸として H を回転させて H^+ が Π の内部を通らず, しかも Π に“接する”状態にすることができます. H^+ と Π の“接点”(の1つ)を X とおく. このとき, H^- が Π の内部の点 Y を通るとすると, 線分 XY と l の交点は Π の内部の点になってしまい, l が Π の内部の点を通らないことに反します. したがって, H^- の方も Π の内部の点を通らないから, この回転させた H が l を含み Π の内部を通らない平面となります. この事実は, 相さんも解答の中で証明してくれました.

あと, 解答に必要なことは, どの2つも平行でなく, しかも同一直線で交わらない3つの平面は, (無限に延びる) 三角柱か三角錐を囲むということです. 実際, 3つの平面を H_1, H_2, H_3 とし, H_1 と H_2 の交線を l とすると, H_3 が l と平行なら, この3つの平面はある三角柱を囲みます. H_3 が l と平行でなければ, 空間は3つの平面で8つの三角錐に分けられます.

解答例

(1) 1辺の長さが $\sqrt{2}$ の正四面体を $ABCD$ とし, これを下図のように, 1辺の長さ1の立方体に押し込めて考えよう.



辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ, K, L, M, N とすると, これらの4点は立方体の4つの面(正方形)の対角線の中点でもある. したがって, K, L, M, N は同一平面上にあり, 四角形 $KLMN$ は1辺の長さが $\sqrt{2}/2$ の正方形となる. さらに, 線分 KM は直線 AB と直線 CD を結ぶ唯一の最短線分(長さ1)であり, 線分 LN は直線 BC と直線 AD を結ぶ唯一の最短の線分であることがわかる.

正方形 $KLMN$ に外接する円(手錠)をはめる. 手錠の直径は $KM = LN = 1$ である. この円(手錠)を正四面体の内部に食い込ませることなく正四面体から抜き取ることができると仮定せよ. 抜き取るために円(手錠)を少し動かすと, この円(手錠)を含む平面は, 辺 AB, BC, CD, DA のそれぞれと, ある点 X, Y, Z, W で交わる. ここで, 「 $X = K$ かつ $Y = L$ かつ $Z = M$ かつ $W = N$ 」ということはない. そこで, 一般性を失うことなく, $X \neq K$ とする. 円(手錠)は正四面体の内部に食い込むことはできないから, X, Y, Z, W は円(手錠)を境界とする円板に含まれるはずである. したがって, XZ の長さは円(手錠)の直径1以下でなければならない. しかしながら, 直線 AB と CD を結ぶ最短の線分は KM だけしかないから, $XZ > KM = 1$ で矛盾が生ずる. ゆえに, この直径1の円(手錠)を正四面体から抜き取ることができない.

(2) 三角形の手錠 ABC が、ある凸多面体 Π にはめられているとしよう。平面 ABC と Π の共通部分は $\triangle ABC$ に含まれるから、直線 AB, BC, CA は Π の内部を通らない。したがって、直線 AB を含み Π の内部を通らない平面 H_{AB} 、直線 BC を含み Π の内部を通らない平面 H_{BC} 、直線 CA を含み Π の内部を通らない平面 H_{CA} が存在する。3つの平面は互いに交わり、しかも3つが同一直線で交わることはない。ゆえに、3つの平面の Π を含む側の共通部分は三角柱か、または三角錐となる。 Π を含む側の共通部分が三角柱なら、この三角柱の2つの側面の交線(3つあるが、すべて平行)の方向に Π を平行移動すれば、三角形の手錠から抜き取ることができる。 Π を含む側が三角錐なら、 Π を三角錐の広い方向に移動して手錠を抜き取ることができる。

コメント

三角形の手錠では、空間内のどんな凸体(くぼみのない図形で、体積が有限で正の数となるもの)も捕まえられることが、凸多面体の場合とまったく同様にして証明できます。これに対して、三角形以外の平面上の単純閉曲線(自分自身と交わらず、かつ、端点を持たない曲線)の手錠については、はめると抜けなくなるような凸多面体が必ず存在することが知られています。